Počítačová grafika III (NPGR010)
Přednáška: Světlo, radiometrie

Adam Hanka, Martin Kahoun

15. října, 2012

1 Úvod

Při syntéze obrazu na počítači se nutně musíme zabývat přenosem světla v námi uvažované scéně. Problému se můžeme v zásadě zhostit dvěma způsoby:

- Fenomenologicky — což je to, co dělá tradiční počítačová grafika (OpenGL, . . .). Namátkou vezměme Phongův model osvětlení, který sice vychází z fyzikálních principů (odraz světla), ale provádí mnoho aproximací a například neuvažuje globální osvětlení, které nahrazuje tzv. ambientní složkou.
- Exaktně — tedy formulací nějakého matematického modelu skutečné fyzikální reality a následným použitím algoritmů řešících tento daný model. Tento přístup je počítačovým ekvivalentem fotografie. Výsledkem jsou potom fotorealistické obrázky.

Nadále se budeme zabývat studiem druhého přístupu. Náš matematický model bude muset uvažovat:

- Matematický popis scény — tedy například geometrický popis objektů, materiály, zdroje světla a umístění kamery.
- Matematický popis propagace světla.
- Definici úrovně detailů — není například třeba simulovat jednotlivé fotony, světlo budeme považovat za souvislý paprsek.

2 Světlo

Z fyziky víme, že světlo je elektromagnetické vlnění šířící se prostorem. Z tohoto vlnění je však pouze úzké spektrum viditelné lidským okem — jsou to vlnové délky λ = 380nm – 720nm. Světlem se ve fyzice zabývá optika, kterou můžeme rozdělit na několik dalších disciplín:

- Geometrická (paprsková) optika — poskytuje zjednodušený, nekompletní pohled na svět. Světlo je chápáno jako paprsek fotonů. Tento přístup je velmi vhodný pro počítačovou grafiku. Na druhou stranu geometrická optika není kompletní teorie, neumí například vysvětlit jevy jako difrakci a interferenci světla.
- Vlnová optika — zabývá se vlnovou podstatou světla a jeho interakcemi s objekty o velikostech porovnatelných s vlnovou délkou (například již zmíněná difrakce, interference, vysvětlení štěrbinového experimentu apod.). Světlo je zde chápáno jako elektromagnetická vlna.
- Kvantová optika — popisuje interakce fotonů s atomy, popisuje světlo jako kvantum energie (my budeme uvažovat o světle jako o spojité energii): $E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$, kde h je Planckova konstanta.

Pozn.: Difrakce je jiný pojem pro ohyb (obecně jakéhokoliv vlnění), neboť světlo se nešíří prostorem pouze jako paprsek. V případě difrakce se naopak do popředí dostává jeho vlnová charakteristika.

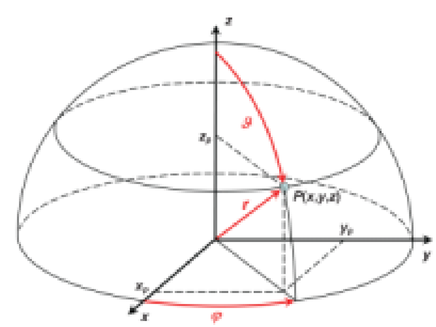
K interferenci (vzájemnému ovlivňování neboli skládání) vlnění dochází v případě, že se prostorem šíří více vlnění najednou. V takovém případě dochází k tomu, že se účinky vlnění mohou zvýšit nebo naopak vyrušit.

Díky interferenci světla vznikají různé barevné obrazce například na mýdlových bublinách nebo obecně na nějakém tenkém filmu šířky porovnatelné s vlnovou délkou světla. Děje se tak proto, že se část světla odrazí na povrchu filmu, zatímco část světla skrz tento tenký film pronikne a odrazí se až na “spodní straně” této vrstvy. Oba odražené paprsky světla se pak skládají. Fázový posun frekvencí obou odražených paprsků pak závisí na úhlu, pod kterým se na povrch díváme. Tomuto jevu se říká **iridescence**.

Rovněž strukturální barva je produktem interference světla. Existují brouci, jejichž krunýř je tvořen tenkými plátky. Světlo se při průchodu těmito plátky láme a odráží, přičemž dochází k jeho interferencím. Výsledná barva je pak také závislá na úhlu pohledu pozorovatele.

Dalším zajímavým efektem je polarizace, což je vlastně přednostní orientace vektoru elektrického a magnetického pole vůči směru šíření světla. Existuje několik druhů polarizace: lineární, kruhová a eliptická. Z normálního světelného zdroje se šíří světlo nepolarizované, avšak díky odrazům od lesklých ploch nebo při průchodu určitými materiály může docházet k jeho polarizaci. Například světlo odražené od hladiny vody nebo světlo rozptýlené v atmosféře je polarizované. Toho lze využít ve fotografii při použití polarizačního filtru.

3 3D souřadnice



Obrázek 1: *Sférické souřadnice (zdroj: www.seos-project.eu)*

Pro určení bodu či paprsku v prostoru lze užít kartézské souřadnice. Pro směr ω pak platí:

$$\omega = [x, y, z],$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

kde r je vzdálenost bodu od středu souřadnicového systému. V případě, že určujeme souřadnice na jednotkové sféře, platí, že $r = 1$.

Výhodnější pro nás však bude definovat si ω ve sférických souřadnicích (viz obrázek 1).

Sférická soustava souřadnic je soustava souřadnic v prostoru, u které jedna souřadnice (označovaná r) udává vzdálenost bodu od počátku souřadnic, druhá souřadnice (označovaná ϕ a nazývaná

azimut) udává úhel odklonu průvodiče od osy x a třetí souřadnice (označovaná θ a nazývaná **elevace**) značí úhel mezi průvodičem a osou z. My budeme souřadnice uvažovat na jednotkové sféře a proto budeme souřadnici r vynechávat, neboť vždy platí, že $r = 1$. Platí následující vztahy:

$$\omega = [\theta, \varphi],$$

$$\theta \in [0, \pi],$$

$$\varphi \in [0, 2\pi).$$

Pro převod z kartézských souřadnic použijeme následující:

$$\theta = \cos^{-1} z,$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

Pro převod do kartézských souřadnic platí tyto vztahy:

$$x = \sin\theta \cdot \cos\varphi,$$

$$y = \sin\theta \cdot \sin\varphi,$$

$$z = \cos\theta.$$

Nyní si definujme **prostorový úhel** jako plochu na jednotkové kouli. To znamená, že objekt vidíme pod prostorovým úhlem Ω **steradiánů** (sr), pokud plocha jeho projekce na jednotkovou kouli je právě Ω.

Plocha celé jednotkové koule (plný prostorový úhel) jsou 4π sr (odvození viz dodatek). Dále definujme diferenciální prostorový úhel, což je neformálně nekonečně malý prostorový úhel okolo daného směru:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{dA}\frac{\cos\theta}{r^2},$$

kde dA je diferenciální ploška, θ je odchylka ω od normály této plošky, pak $\mathrm{d}\omega$ je velikost této diferenciální plošky promítnuté na kouli o poloměru r. Následující vztah je velmi důležitý:

$$\mathrm{d}\omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi. \tag{1}$$

Díky tomuto vztahu můžeme analyticky integrovat funkci přes kouli nebo sféru, neboť platí toto:

$$\int \mathrm{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int\int \mathrm{f}(\theta, \varphi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Člen $\sin\theta$ se v rovnici nachází kvůli promítání bodů z povrchu koule na rovinu ekliptiky — šířka "čtverečku" na kouli je totiž odvislá právě od θ.

4 Radiometrie a fotometrie

Radiometrie se zabývá měřením elektromagnetického záření v prostoru. Používá k tomu absolutní (tedy absolutně měřitelné) veličiny.

Fotometrie se naopak zabývá působením elektromagnetického záření na lidské oko.

Radiometrické a fotometrické veličiny jsou si dost podobné a jsou navzájem převoditelné pomocí vztahu zvaného vizuální odezva na spektrum:

$$R = \int\limits_{380\mathrm{nm}}^{720\mathrm{nm}} V(\lambda) \cdot S(\lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda, \tag{2}$$

kde S je spektrum a V je tzv. vizuální křivka světelné efektivity. Ta říká, jak intenzivní světelný vjem vyvolá daná vlnová délka v lidském oku. Tento vztah vznikl pro tzv. standardního fotometrického pozorovatele, to znamená měřením odezvy velkého vzorku osob.

Světelnou energii budeme považovat za spojitou a nekonečně dělitelnou. Dopouštíme se tím jisté fyzikální nepřesnosti, neboť zanedbáváme diskrétní povahu fotonu. Tok světla si budeme představovat jako tok částic bez vzájemné interakce. Hustota energie pak bude úměrná hustotě částic. Je důležité si uvědomit, že tato představa je ilustrativní (je to matematický model) a nemá nic společného s kvantovou fyzikou.

4.1 Integrální a spektrální radiometrické veličiny

Nejprve je ještě třeba vysvětlit pojmy spektrálních a integrálních veličin. Integrální veličiny popisují celkový účinek záření na celém rozsahu vlnové délky. Spektrální veličiny popisují účinek záření na určité vlnové délce λ.

Vztah mezi integrálními a spektrálními veličinami vysvětlíme na příkladu zářivého toku: **Zářivý tok** vyjadřuje celkové množství energie, které dopadne na určitou plochu za jednotku času (tedy energie všech vlnových délek), zatímco **spektrální zářivý tok** vyjadřuje množství energie jedné vlnové délky, které na určitou plochu dopadne za jednotku času.

Abychom z celkové (tedy integrální) veličiny zjistili její spektrální protějšek, využijeme limitního přechodu. To vychází z představy, že pravděpodobnost, že existuje foton, který má právě požadovanou vlnovou délku, je nulová (matematicky řečeno je uvažovaných fotonů vždy konečný počet, zatímco bodů intervalu je nespočetně). V limitním přechodu proto musíme dělit stále se zmenšujícím intervalem.

Označme pro účely následujícího výpočtu $\Phi_e([\lambda_1, \lambda_2])$ zářivý tok o vlnových délkách v intervalu $[\lambda_1, \lambda_2]$. Pak pro danou vlnovou délku λ platí následující vztah:

$$\Phi_{\mathrm{e}\lambda} = \lim_{\substack{|\lambda_2 - \lambda_1| \to 0 \\ \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]}} \frac{\Phi_e([\lambda_1, \lambda_2])}{|\lambda_2 - \lambda_1|} = \frac{\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e}}{\mathrm{d}\lambda}$$

Naopak máme-li **spektrální zářivý tok** a chceme-li z něho získat **integrální (celkový) zářivý tok** (tedy pro všechny možné vlnové délky), pak musíme, jak již název veličiny sám napovídá, využít určitého integrálu. Tato představa odpovídá neformálně řečeno tomu, že posčítáme hodnoty spektrálních zářivých toků přes všechny možné vlnové délky:

$$\Phi_\mathrm{e} = \int_0^\infty \Phi_{\mathrm{e}\lambda}\mathrm{d}\lambda$$

Poznámky:

- Spektrální radiometrické veličiny by se měly správně zapisovat s dolním indexem λ, jak bylo v řeči našeho příkladu vidět. (Integrální) zářivý tok jsme zapisovali jako Φ_e, zatímco spektrální zářivý tok takto: $\Phi_{\mathrm{e}\lambda}$. V terminologii počítačové grafiky však dolní index λ většinou vynecháváme.
- Má-li integrální veličina jednotku X, pak spektrální veličina bude mít vždy jednotku $\mathrm{X} \cdot \mathrm{m}^{-1}$ - to odpovídá přidané vlnové délce do rozměru veličiny - tedy X na nanometr.

  V řeči našeho příkladu má tedy (integrální) zářivý tok jednotku Watt (W), zatímco jednotkou spektrálního zářivého toku je Watt na metr ($\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1}$).

- Výše uvedené vztahy mezi spektrální a integrální veličinou platí pro všechny ostatní veličiny zcela analogicky.

Následuje přehled radiometrických veličin a jejich fotometrických ekvivalentů. Budeme uvádět pouze integrální veličiny.

4.2 Zářivá energie (*radiant energy*) - $Q[J]$

Zářivá energie vyjadřuje (celkové) množství energie, které projde určitou plochou S (může být reálná i abstraktní) v prostoru za určitý čas.

Jednotkou zářivé energie je joule [J].

Fotometrickým ekvivalentem je světelná energie (*luminous energy*), její jednotkou je lumen-sekunda $[\mathrm{lm} \cdot \mathrm{s}]$. Pro přepočet ze zářivé energie si vzpomeneme na (2), dostaneme vztah:

$$Q_v = \int V(\lambda) \cdot Q_\lambda(\ldots, \lambda) \cdot \mathrm{d}\lambda.$$

4.3 Zářivý tok (*radiant flux*) - $\Phi[W]$

Zářivý tok vyjadřuje, jak rychle teče energie do plochy či z plochy S, tedy:

$$\Phi(S,t) = \lim_{\substack{\mathrm{d}[t_1,t_2]\to 0\\ t\in[t_1,t_2]}} \frac{Q(\mathrm{S},[t_1,t_2])}{\mu[t_1,t_2]} = \ldots = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Jednotkou je watt [W].

Ekvivalentní fotometrická veličina je světelný tok (*luminous flux*), jehož jednotkou je lumen [lm].

Upřesněme ještě některé pojmy, které se vyskytují v matematických vztazích. Buď M množina, pak $\mathrm{d}(\mathrm{M})$ je vzdálenost jejích dvou nejvzdálenějších bodů:

$$\mathrm{d}(\mathrm{M}) = \sup_{\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{M}} \parallel \mathrm{x} - \mathrm{y} \parallel$$

Velikost (míru) množiny M označíme jako $\mu(\mathrm{M})$. Míra intervalu $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ je jeho délka, tedy $\mu([\mathrm{a},\mathrm{b}]) = |\mathrm{b}-\mathrm{a}|$. V limitním přechodu touto velikostí dělíme. Někdy můžeme zářivý tok, který dopadá na plochu, značit spodním indexem i, zatímco odchozí (vyzářený) zářivý tok můžeme značit spodním indexem r. Získáme tak veličiny označené Φ_i a Φ_r.

4.4 Ozáření (*irradiance*) - $E[W.m^{-2}]$

Ozáření udává plošnou hustotu dopadajícího zářivého toku v bodě x nějaké plochy S, matematicky:

$$E(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{d(\mathrm{S})\to 0\\ \mathbf{x}\in\mathrm{S}}} \frac{\Phi_i(\mathrm{S})}{\mu(\mathrm{S})} = \ldots = \frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{dS}}.$$

V tomto vztahu využíváme limitního přechodu, neboť vzhledem ke spojitému charakteru plochy je pravděpodobnost, že existuje foton, který dopadne právě do bodu x, nulová.

Uvažujeme-li hustotu toku vycházejícího z nějakého světelného zdroje, mluvíme místo ozáření o intenzitě vyzařování (*radiosity*). Jednotkou je watt na metr čtvereční $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$ — mluvíme tedy o výkonu na jednotku plochy.

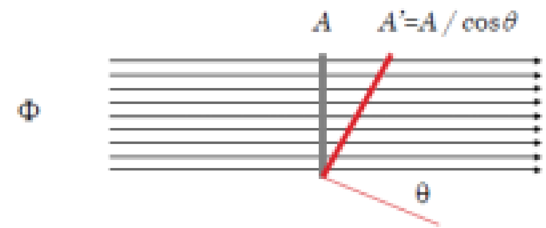
Fotometrickou ekvivalentní veličinou je osvětlení (*illuminance*), jejíž jednotkou je lux $[\mathrm{lx} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$. Expozimetr užívaný ve fotografii měří právě tuto veličinu a užívá k tomu senzor pokrývající celou hemisféru.

4.5 Lambertův kosínový zákon

Uvažme nyní plochu A, jež není kolmá ke směru přicházejícího světla. Světelný tok se jistě nezmění, nicméně změní se nám velikost ozářené plochy. *Irradiance* je plošná hustota, měla by se tedy též změnit. Otázkou je, jak přesně. Buď tedy θ odchylka uvažované plochy A' od roviny kolmé na směr přicházejícího světla A, pak správnou hodnotu *irradiance* dostaneme takto:

$$E' = \frac{\Phi}{\mathrm{A}'} = \frac{\Phi}{\mathrm{A}} \cdot \cos\theta,$$

tomuto vztahu se také říká Lambertův kosínový zákon.



Obrázek 2: *Lambertův kosínový zákon*

4.6 Intenzita vyzařování (*Radiant exitance, radiosity*) - $B[W.m^{-2}]$

Intenzita vyzařování udává plošnou hustotu světelného toku, který odchází z nějaké plochy v jejím bodě x - může se jednat o světlo emitované i odražené. Vzorcem to lze vyjádřit následovně:

$$B(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{d(\mathrm{S})\to 0\\ \mathbf{x}\in\mathrm{S}}} \frac{\Phi_r(\mathrm{S})}{\mu(\mathrm{S})} = \ldots = \frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{dS}}.$$

Fotometrickou ekvivalentní veličinou je luminosity, jejíž jednotkou je lux $[\mathrm{lx} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$.

4.7 Zářivost (*radiant intensity*) - $I[W.sr^{-1}]$

Zářivost udává hustotu světelného toku (výkon) na jednotkový prostorový úhel (ve směru ω):

$$I(\omega) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega}(\omega).$$

Jednotkou je watt na steradián $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$.

Ekvivalentní fotometrickou veličinou je svítivost (*luminous intensity*), jejíž jednotkou je kandela $[\mathrm{cd} = \mathrm{lm} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$, což je jedna ze základních jednotek SI.

Homogenní bodový zdroj má svítivost konstantní všude, t.j. $I(\omega) = I_0$, svítivost reflektoru (*spot light*) je konstantní uvnitř kuželu, mimo něj nulová. Pro obecné světelné zdroje aproximované jako bodové se v osvětlovací technice svítivost udává goniometrickými diagramy.

Výpočet výkonu izotropního zdroje s konstantní zářivostí viz příklady ze cvičení.

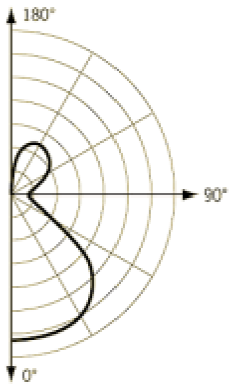
4.8 Bodové světelné zdroje

Uvažujeme, že světlo je emitováno z jednoho bodu. Fyzikálně se jedná o malou plochu, matematicky je však představa jediného bodu postačující. Emise bodového zdroje je plně popsána intenzitou jako funkcí směru vyzařování: $I(\omega)$.

- **Bodové světlo** — Jeho intenzita je do všech směrů konstantní.
- **Reflektor (Spot light)** — Jeho intenzita je konstantní v rámci kužele, jinde je nulová. Intenzita je funkcí odchylky od referenčního směru d:

$$I(\omega) = f(\angle\omega, \mathrm{d}).$$

- **Obecný bodový zdroj** — Jeho intenzita je popsána goniometrickým diagramem, toto se používá zejména v osvětlovací technice.



Obrázek 3: *Goniometrický diagram obecného světelného zdroje (zdroj: http://docs.autodesk.com)*

4.9 Zář (*radiance*) - $L[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$

Zář udává prostorovou hustotu toku v bodě $\mathbf{x}$ na ploše S a směru ω. Z definice jde o výkon na jednotkový úhel a na jednotku plochy kolmou ke směru světla.

$$L(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\cos\theta \, \mathrm{dS} \, \mathrm{d}\omega}.$$

S je plocha v obecné poloze, ale **radiance** je definována jako výkon na jednotkovou plochu *kolmou* k paprsku. Toho je dosaženo užitím koeficientu $1/\cos\theta$ v tomto vztahu, který kompenzuje úbytek *radiance* při otočení plochy z kolmého směru. Tím je tato veličina nezávislá na volbě plochy. Tento koeficient vyplývá z Lambertova kosínového zákona.

Jednotkou *radiance* je watt na metr čtvereční na steradián $[\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{sr}^{-1}]$.

Fotometrickou ekvivalentní veličinou je svítivost (*luminance*), její jednotkou je kandela na metr čtvereční $[\mathrm{cd} \cdot \mathrm{m}^{-2}]$.

Nyní si uveďme dva důležité vztahy pro výpočet *irradiance* a *radiant flux* z *radiance*:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}) &= \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \omega) \cdot \cos\theta \cdot \mathrm{d}\omega = \begin{array}{c} \text{subst.} \\ \mathrm{d}\omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \end{array} = \\ &= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} L(\mathbf{x}, \theta, \varphi) \, \cos\theta \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Phi = \int\limits_{\mathrm{A}} E(\mathbf{x}) \, \mathrm{dx} = \int\limits_{\mathrm{A}} \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L(\mathbf{x}, \omega) \, \cos\theta \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{dx}. \tag{4}$$

Dodejme ještě, že $\mathrm{H}(\mathrm{x})$ je hemisféra nad bodem x a $\cos\theta \mathrm{d}\omega$ je promítnutý prostorový úhel (projected solid angle). Zde je faktor $\cos\theta$ z toho důvodu, že vlastní velikost promítnutého úhlu záleží na elevaci (θ).

Chceme-li počítat výkon plošného zdroje, musíme integrovat zář přes celou jeho plochu a přes všechny směry, tedy:

$$\Phi = \int\limits_{\mathrm{A}} \int\limits_{\mathrm{H}(\mathbf{x})} L_c(\mathbf{x}, \omega) \, \cos\theta \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{dA}.$$

Výsledný tok, by se měl pohybovat řádově v desítkách až tisících wattů — jiné hodnoty nás mohou upozornit na chybu.

Na závěr si uveďme ještě důležité vlastnosti *radiance*:

1. *Radiance* je konstantní podél celé dráhy paprsku. Tuto vlastnost odvodíme ze zákona zachování energie (toku):

$$\underbrace{L_1 \, \mathrm{d}\omega_1 \, \mathrm{dA}_1}_{\text{emitovaný výkon}} = \underbrace{L_2 \, \mathrm{d}\omega_2 \, \mathrm{dA}_2}_{\text{přijímaný výkon}}.$$

   Z tohoto vztahu lze pomocí vztahu (1) pro diferenciální prostorový úhel odvodit rovnost $L_1 = L_2$. Veličina T definovaná následujícím vztahem se nazývá kapacita paprsku.

$$T = \mathrm{d}\omega_1 \, \mathrm{dA}_1 = \mathrm{d}\omega_2 \, \mathrm{dA}_2 = \frac{\mathrm{dA}_1 \cdot \mathrm{dA}_2}{r^2}.$$

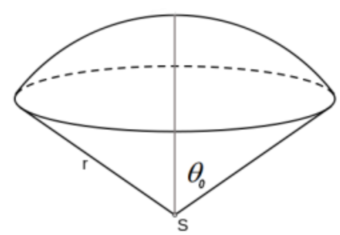
2. Odezva senzoru je přímo úměrná hodnotě *radiance* odražené od plochy senzorem viditelné. Z toho plyne, že pokud se budeme dívat z metru a z deseti metrů na uniformně vyzařující plochu, bude odezva senzoru stejná, protože stále integrujeme přes stejný prostorový úhel. Ale, pokud budeme mít černou stěnu s bílým flekem, tak se odezva bude zmenšovat se čtvercem vzdálenosti, protože se bude zmenšovat prostorový úhel zabraný bílou skvrnou.
3. Na rozhraní (v bodě, kde ji vyšetřujeme) je *radiance* nespojitá, rozlišujeme tedy příchozí a odchozí.

A Cvičení

1) Spočítejte velikost povrchu jednotkové koule.

$$\mathrm{S} = \int\limits_{\Omega} 1 \, \mathrm{d}\omega = \underbrace{\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi}_{\text{Použili jsme (1)}} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 2 \, \mathrm{d}\varphi = [2\mathrm{x}]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

2) Určete velikost povrchu kulového vrchlíku daného úhlem θ_0.



Obrázek 4: *Kulový vrchlík s vyznačeným úhlem* θ_0

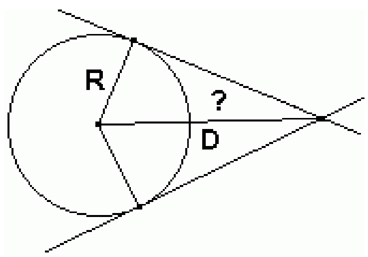
K tomuto výpočtu využijeme předchozí rovnice, akorát tentokrát nebudeme integrovat podél celého úhlu elevace θ - tedy od 0 do π, ale pouze do úhlu θ_0.

$$\mathrm{S} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\theta=0}^{\theta_0} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot [\,-\cos\theta\,]_0^{\theta_0} = 2\pi \cdot (1 - \cos\theta_0).$$

3) Spočítejte velikost povrchu kulového pásu daného úhly θ_0 a θ_1.

Zde snadno nahlédneme, že to, co hledáme, je rozdíl dvou kulových vrchlíků daných právě úhly θ_0 a θ_1.

4) Pod jakým prostorovým úhlem pozorujeme kouli o poloměru R, jejíž střed je vzdálen D od stanoviště?



Obrázek 5: *Pozorovaná koule se středem ve vzdálenosti D a poloměrem R*

Hledaný úhel označme α. Přímo z definice funkce sinus plyne, že $\sin\alpha = \mathrm{R}/\mathrm{D}$. Hledaný prostorový úhel je tedy roven povrchu kulového vrchlíku o poloměru α, viz příklad 2.

5) Jaký je výkon (tok) izotropního bodového zdroje s konstantní zářivostí (intenzitou) I ve všech směrech?

Izotropní znamená, že zdroj září do všech směrů stejně. Sečteme tedy pomocí integrálního počtu přes všechny směry vyzařování I. Tato úvaha vede na následující vztah:

$$\Phi = \int\limits_{\Omega} \mathrm{I}\,\mathrm{d}\omega = (\mathrm{I}\;const.) = \mathrm{I} \cdot \int\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}\omega = 4 \cdot \mathrm{I} \cdot \pi.$$

Poslední rovnost plyne ze cvičení č. 1).